La théorie du chaos

Le monde est un chaos, et son désordre
excède tout ce qu'on y voudrait apporter
de remède.

Pierre Corneille

Le chaos n'est qu'un principe méconnu
de l'ordre.

Anonyme

L'art est l'antithèse même du chaos, qui n'est
autre chose qu'une avalanche d'accidents.

Edward Gordon Craig

L'ordre, et l'ordre seul, fait en définitive
la liberté. Le désordre fait la servitude.

Charles Péguy

Introduction

"*Avant tout fut chaos, puis Terre aux larges flancs*" (Hésiode, Théogonie). C'est ainsi que, depuis les temps anciens, l'homme croyait en un chaos précédant toujours l'ordre, l'interprétant comme un *désordre* fait de confusion, d'anarchie ; bref, un mal à éviter.

Ce n'est réellement que depuis environ un siècle que la notion de "chaos" évolua et fut redéfinie.

Il existe aujourd'hui une *théorie du chaos* qui se répand dans la presse scientifique et dans les ouvrages de vulgarisation, croissant en intérêt pour un public de plus en plus avide de comprendre le monde qui l'entoure. A partir de là, il semble tout naturel de poser la problématique suivante : "*De l'ordre dans le désordre - Les origines et les pères de la théorie du chaos : quelles sont les réalités chaotiques expliquées par cette théorie ?*".

En prenant pour point de départ nos connaissances de Terminale scientifique, nous cherchons ici à cerner cette théorie, ses implications et aboutissements ; et ce, dans la *perspective historique* de sa "découverte".

Nous aborderons ainsi, dans un premier temps, les fondements de cette théorie, puis nous la définirons précisément, avant d'en venir à ses applications concrètes. Ce parcours nous fera aborder, dans la mesure de nos compétences, des notions aussi diverses que la physique déterministe, le hasard, l'entropie, les fractales ou la météorologie, et côtoyer les scientifiques qui ont contribué à l'élaboration, de près ou de loin, de ce que nous appelons aujourd'hui la "théorie du chaos".

La théorie du chaos fut entrevue pour la première fois à la fin du XIXe siècle. Mais pour arriver à en saisir la thèse, il nous faut aussi poser celle à laquelle elle "s'oppose", ainsi que les notions annexes qui s'y rattachent.

Nous traiterons ici des thèmes suivants :

I La physique déterministe : Newton et Laplace
II Le hasard, l'entropie et la physique statistique : Clausius, Boltzmann et Heisenberg
III Premier pressentiment de la théorie du chaos : Poincaré

Isaac Newton (1642 - 1727) est incontestablement l'une des personnalités qui légua le plus à la science contemporaine. C'est à lui que nous devons, en plus des trois "lois de Newton" (principe d'inertie, relation fondamentale de la dynamique ou théorème du centre d'inertie, principe d'interaction), la loi de la *gravitation universelle*, selon laquelle "deux corps ponctuels A et B de masses m_A et m_B exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction opposées dirigées suivant la droite AB et d'intensité proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance". Cette loi est, encore de nos jours, admise comme gouvernant les corps, malgré les rectifications apportées par la relativité générale d'Albert Einstein (1879 - 1955) ou la physique quantique.

C'est donc une physique de type newtonien, *déterministe*, que nous apprenons à l'école et selon laquelle l'univers serait régi par des lois immuables. Ainsi, c'est selon cette vision du monde que nous calculons la position d'arrivée au sol d'une balle à partir de quelques informations sur les conditions initiales (vitesse, hauteur, angle…), pour ne citer que cet exemple.

Les systèmes mathématiques et modèles manipulés par Newton et ses successeurs sont caractérisés par leur réversibilité, leur prévisibilité et leur reproductibilité, pour peu que les conditions initiales soient rétablies à l'identique.

Pourtant, les hommes se trouvent régulièrement dans l'incapacité de prévoir l'évolution de systèmes (pensons, entre autres, à la météorologie, sur laquelle nous reviendrons plus loin). L'unique façon d'expliquer cet état de fait fut pendant longtemps le rappel de l'erreur expérimentale, de l'approximation faite de valeurs initiales, ou encore du trop grand nombre d'éléments intervenant dans certains systèmes (dits "complexes"). D'où une évolution imprévisible de tels systèmes.

Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827), à la suite de Newton, illustre ainsi la vision déterministe du monde : "*Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux*". Cette conception déterministe implique que tout le futur est contenu, déterminé par le présent, et que, connaissant les lois du mouvement et les conditions initiales, on peut déterminer avec certitude tout mouvement futur. Laplace écrivait encore : "*Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme cause de celui qui va suivre*". On appelle parfois "*démon de Laplace*" cette hypothétique conscience qui, ayant une parfaite connaissance de tous les éléments et de toutes les relations d'un système, connaîtrait aussi bien le passé que le futur

Le *hasard* est défini par le philosophe Cournot comme un "*concours de plusieurs séries de causes indépendantes pour la production d'un événement*". Il est donc, par définition, imprédictible. De nombreux exemples correspondent au hasard : un lancer de dé, la loterie nationale, etc. En effet, le prochain numéro gagnant ne peut en aucun cas être déduit de la connaissance des précédents. On ne peut donc qu'utiliser les probabilités pour appréhender de telles situations.

On définit parfois l'*entropie* comme la mesure du désordre d'un système, ou de sa prédictibilité. Il s'agit d'une notion qui fut introduite en thermodynamique en 1850 par Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822 - 1888), et selon laquelle "dans tout processus chimique, l'entropie reste constante ou augmente, et, si elle augmente, le processus est irréversible" (deuxième loi de la thermodynamique). L'irréversibilité s'explique par le fait que le nombre d'états possibles au final est si grand qu'il ne peut y avoir de "retour en arrière".

La quête de Ludwig Boltzmann (1844 - 1906) a, par la suite, consisté à tenter de comprendre les propriétés des systèmes macroscopiques composant notre monde à partir des propriétés des éléments de sa composition, se situant à l'échelle atomique. Or, leur nombre est si important qu'une telle évolution ne peut être suivie ; seules les probabilités et la *loi des grands nombres* (qui dit que "*la fréquence de tirage d'un objet dans un échantillon est d'autant plus proche de la fréquence de cet objet dans l'ensemble sur lequel on a pris l'échantillon, que cet* *échantillon est grand par rapport à l'ensemble ; plus l'échantillon est grand en regard de l'ensemble, plus il en est représentatif*") permettent une interprétation quasi-fiable.

Par ailleurs, on sait, depuis l'avènement de la *physique quantique*, en particulier par Werner Heisenberg (1901 - 1976), qu'il est impossible de connaître précisément à la fois la position et la vitesse d'une particule à un moment donné. Cette incertitude n'est pas sans remettre en question la conception de Laplace, selon laquelle la connaissance de la position et de la vitesse de toutes les particules à un certain moment permettrait la prédiction de leur mouvement ultérieur. Les inégalités d'Heisenberg énoncent en effet que des variables conjuguées comme la position et la vitesse d'une particule, ou l'énergie et la position, ne peuvent être déterminées simultanément. Ces inégalités seront d'ailleurs complétées par Einstein.

La théorie quantique est donc, elle aussi, par essence, *probabiliste*. Tout ceci nous conduit donc à une appréhension plus "statistique", ou "stochastique", du monde : la balle dont nous étudions le mouvement en Terminale a statistiquement x % de chances de tomber là où nous le prédisons, mais pourrait aussi tomber un peu moins loin ou un peu plus loin. En effet, il faudrait, pour prédire avec succès cette position d'arrivée, tenir compte précisément des frottements, ce qui est impossible puisque nous ne connaîtrons jamais avec la précision voulue la composition des molécules de l'air présentes, et autres détails

Henri Poincaré (1854 - 1912) fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos. Nous savons, depuis Newton, que la loi d'attraction universelle existe entre deux corps. Mais nous nous basons sur une approximation bien inexacte en ne considérant à chaque fois que deux corps. En réalité, ce sont de nombreux corps qui interagissent : il y a, en plus de l'interaction "Soleil-Terre", l'interaction "Lune-Terre", puis l'interaction "Mars-Terre", etc

Poincaré a ainsi démontré que trois corps en interaction pouvaient impliquer un système d'équations non résoluble, et donc des comportements s'apparentant au hasard. Jusqu'alors, un comportement hasardeux était systématiquement mis au compte du phénomène des grands nombres déjà évoqué. Poincaré, justement, vient remettre en cause cette façon d'interpréter le hasard, et définit pour la première fois la "*sensibilité critique aux conditions initiales*", un aspect important de tout système chaotique. Il a de la sorte établi que "*une cause très petite qui nous échappe détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas voir, et alors nous disons que c'est l'effet du hasard […]. Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. La prédiction devient impossible.*"

Il est maintenant temps de poser la définition même de la théorie du chaos, et de développer son aspect théorique et mathématique.

Nous traiterons ici des thèmes suivants :

I Définition et exemples
II Aspect mathématique et fractales : Mandelbrot

La théorie du chaos a été reconnue en tant que telle à partir des années 1960 par de nombreux scientifiques. Ainsi, un système chaotique est un système *complexe*, régi par une grande variété de facteurs (comme la météorologie), dépendant de *plusieurs paramètres* et dont la caractéristique fondamentale est son *extrême sensibilité aux conditions initiales*. Le comportement de tels systèmes est *imprévisible*, bien que leurs composantes soient gouvernées par des lois simples, connues, déterministes. Les méthodes théoriques et mathématiques sont inadaptées à la prévision de tels systèmes ; on en est réduit à tenir compte de la statistique, du seul calcul des probabilités

On a découvert, pourtant, dans les années 1960, que de tels systèmes peuvent être représentés géométriquement dans un espace dont la dimension dépend du nombre de paramètres inhérents au système, dimension qui n'a rien à voir avec les dimensions traditionnelles que nous utilisons. L'état du système est alors représenté à chaque instant par un point dans cet espace appelé "*espace des phases*". On obtient une courbe qui correspond à la trajectoire de ce point. On constate alors que ce point est attiré vers une courbe limite, près de laquelle il repasse régulièrement. Les mathématiciens appellent ces courbes des "*attracteurs étranges*", définitionnels de la théorie du chaos. Les attracteurs étranges présentent par ailleurs une caractéristique bien particulière, une *symétrie* *interne*, de sorte que si l'on procède à un "zoom" avant ou arrière, c'est toujours la même structure que l'on retrouve. Il existe donc une formation préférentielle aux systèmes chaotiques, un ordre sous-jacent au désordre. Les courbes fractales, développées en premier par le mathématicien Benoît Mandelbrot (1924 -) sont des attracteurs étranges.

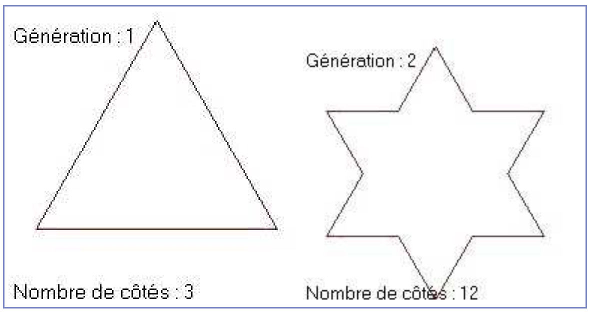
Il existe d'innombrables exemples de chaos dans notre vie quotidienne. Les trajectoires d'une feuille tombant d'un arbre, des volutes d'une fumée s'élevant dans les airs, d'un objet lancé dans un cours d'eau, en font partie et sont effectivement imprévisibles. Une autre illustration que l'on peut en donner est celui des boules de billard à obstacles convexes. Théoriquement, il est possible de faire en sorte qu'une boule de billard frappe trois faces d'une table de billard en leur centre, où seraient placés des obstacles convexes, avant de revenir à sa position initiale. Dans la réalité, d'infimes inexactitudes dans la direction initiale entraînent des trajectoires totalement différentes…

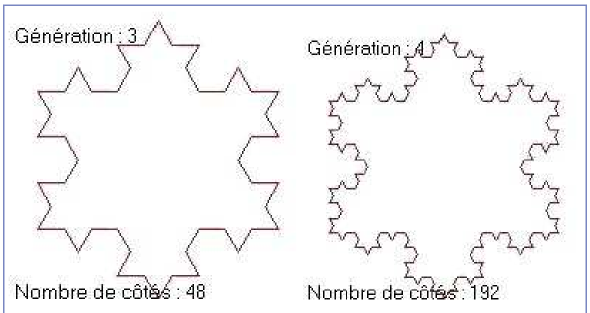
En 1872, le mathématicien Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 -1897) provoqua une crise dans les mathématiques en décrivant une courbe qui ne pouvait être "*différenciée*" (dérivée) - c'est-à-dire dont la pente d'un point à un autre ne peut être calculée mathématiquement. Jusqu'alors, les mathématiciens pensaient que toutes les courbes pouvaient être différenciées, hormis bien sûr lorsque la courbe était discontinue. En effet, comment pouvait-il y avoir une pente à l'endroit ou la courbe s'arrêtait ? Mais à la fin du dix-neuvième siècle, le mathématicien Emil Du Bois-Reymond (1818 - 1896) présenta l'équation de Weierstrass pour une courbe continue si complexe qu'elle ne pouvait être différenciée. Un peu plus tard, Giuseppe Peano (1858 -1932) découvrit une "courbe de remplissage du plan", une courbe qui remplissait toute la feuille sur laquelle elle était tracée, une courbe, donc, à deux dimensions. Le grand mathématicien David Hilbert (1862 - 1943) en a trouvé une aussi, connue sous le nom de "*Hilbert*". Or, comme chacun le sait, une courbe est unidimensionnelle. Tous les concepts mathématiques fondamentaux semblaient avoir perdu leur signification ! Les mathématiciens se défendirent en considérant ces courbes comme de simples créations de la pensée, n'ayant rien à voir avec le monde réel ; Poincaré lui-même adopta une position défensive et les qualifia "d'étranges galeries des monstres".

Soixante-dix ans plus tard, le mathématicien français Benoît Mandelbrot (1924 -) fut le premier à prendre ces courbes au sérieux et à montrer qu'au contraire, elles avaient un rapport direct avec la géométrie de l'Univers...

Mais qu'est-ce donc qu'une *fractale* et de quoi est-ce fait ?

Les fractales, du latin *fractus*, "brisé", sont des formes géométriques obtenues par fragmentation régulière à l'infini d'une figure donnée. On parle aussi "d'objets fractals" ou de "géométries fractales". Pour construire ces courbes, il faut commencer avec deux formes géométriques : un *initiateur* et un *générateur*. Le générateur est une ligne brisée faite de n segments de longueur r. En partant de l'initiateur, chaque étape de la construction consiste à remplacer chaque segment de l'initiateur par une copie du générateur. Une étape de la construction va être appelée une "*itération*" ; si l'on répète la même opération n fois, on parlera de l'image de la n-ième itération. Les premiers exemples de tels objets furent les *courbes de Koch* et *de Peano*. La première, décrite en 1904 par Helge von Koch (1870 -1924), part d'un triangle équilatéral (initiateur) ; au milieu de chacun des côtés, on construit un nouveau triangle équilatéral dont le coté est le tiers du premier. On recommence la même opération sur les cotés de chaque triangle obtenu, et cela indéfiniment.





Le flocon de von Koch

Ces courbes fractales sont antérieures au concept de "fractale" tel qu'il fut inventé, à partir de 1962, par Mandelbrot.

Ces courbes sont obtenues par répétition ou itération d'une même opération sur chaque segment. Plus précisément, il y a : a) itération de l'application du générateur à chaque segment de la figure, puis b) itération de l'opération décrite en a) sur les nouveaux segments obtenus. Notons que le professeur Michael F. Barnsley (1946 -), de l'*Institute of Technology of Georgia,* a démontré qu'un nombre suffisamment grand d'applications aléatoires d'un générateur, cette fois exprimé comme une (ou plusieurs) fonction(s) affine(s), sur un point choisi au hasard, construit également la figure limite de telles fractales. A l'ordinateur, de tels systèmes itératifs de fonctions s'exécutent considérablement plus rapidement que les itérations sur des segments de droites.

Les courbes fractales possèdent une propriété d'*auto-similarité* : si on applique le générateur à une droite, chaque tronçon grossi est semblable à la courbe entière. C'est une "*invariance d'échelle*" : si l'on change l'échelle de la figure, celle-ci reste semblable à elle-même. Mandelbrot remarqua que les formes naturelles répondaient souvent à des propriétés de ce type : contour des nuages, choux-fleurs, flocon de neige, feuille de fougère, arbres, montagnes, milieu interstellaire, éclairs électriques…

Un exemple très connu de problèmes posés par les fractales dans notre univers est celui de la longueur de la côte de la Bretagne. Pour mesurer la longueur précise de ce littoral, il faudrait contourner chaque caillou, chaque grain de sable, et sa longueur deviendrait infinie. D'ailleurs, toutes les côtes auraient alors la même longueur, infinie. Ce qui nous ramène au concept de *dimension fractale.*

Benoît Mandelbrot, dans son livre *Les objets fractals*, propose plusieurs définitions de cette notion de dimension fractale, qui ("en général", dit-il) aboutissent au même résultat. Le raisonnement le plus simple pour un non-mathématicien consiste à partir d'un problème apparemment simple : quelle est la *longueur d'une ligne fractale* ?

Le résultat surprenant est que cela dépend de la règle avec laquelle on fait la mesure : plus elle est petite, plus la longueur trouvée sera grande. En fait, il faut d'abord réfléchir à la façon dont on opère. Dans le cas des courbes de la géométrie classique, quand on observe à la loupe, plus on agrandit, plus la courbe a l'air de s'aplatir localement et mieux on peut la suivre en lui appliquant une petite règle. Par contre, dans le cas d'une courbe fractale, la courbe agrandie est toujours aussi échancrée et la règle s'applique toujours mal, quel que soit l'agrandissement, et quelle que soit la taille de la règle. On est bien forcé d'accepter ce fait. On continue en disant qu'on a construit ainsi une approximation polygonale de la courbe, et on se contente de mesurer la longueur de ce contour polygonal.

Une fois construite une première approximation polygonale et sa longueur notée, on divise la règle par 2 et on recommence. Dans le cas des courbes classiques, le résultat se stabilise très vite, et on obtient ainsi la "longueur" de la courbe. Par contre, dans le cas des courbes fractales, cette longueur polygonale augmente vers l'infini, plus précisément comme L / L^D, où L est le côté du polygone et D un nombre caractéristique de la courbe fractale compris entre 1 et 2, pour les fractales sans point double (i.e. qui ne se recoupent pas). Disons que D caractérise la *croissance vers l'infini* de la longueur mesurée ; plus D est grand, plus la croissance est rapide.

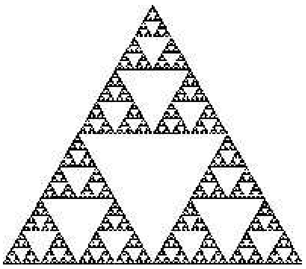
En géométrie classique, on dit qu'une courbe est un espace à une dimension, précisément parce qu'on sait mesurer les longueurs le long de la courbe, et qu'on peut repérer tout point de la courbe par un seul nombre, son abscisse. De même, toujours en géométrie classique, on dit que les surfaces sont des espaces à deux dimensions parce qu'il suffit de deux coordonnées pour en repérer les points. Ces nombres entiers, 1 ou 2, sont appelés *dimensions euclidiennes*.

Il est impossible de désigner ainsi un point d'une fractale, puisqu'on ne peut pas mesurer de longueur le long de la fractale. Une ligne fractale dessinée dans un plan appartient bien à ce plan, de dimension 2, mais on ne peut pas dire qu'elle soit de dimension 1. Par contre, on dispose du nombre *D*, réel, qui est proche de 1, quand la fractale est "plutôt" lisse ; il augmente quand la fractale devient plus accidentée, et tend vers 2 quand la fractale remplit la portion de plan qui lui sert de support (quand la fractale ressemble à une surface). En quelque sorte, ces fractales réalisent une sorte d'évolution entre les courbes lisses et les surfaces de la géométrie classique, alors que le nombre *D* évolue de 1, dimension euclidienne d'une courbe lisse, à 2, dimension euclidienne d'un morceau de plan. Pour cette raison, ce nombre *D* est appelée *dimension fractale de la courbe fractale*.

Toutes les fractales ne sont pas construites à partir d'un initiateur et d'un générateur, mais le terme "itération" revient souvent. En effet, toutes les fractales sont construites en itérant un *algorithme*, qui diffère selon le type de fractales que l'on veut construire.

Fractales géométriques

Premièrement, il est important de souligner que les fractales géométriques, celles qui sont obtenues par l'application d'opérations géométrique sur des formes uni, bi ou tridimensionnelles, sont une catégorie d'objets faciles à obtenir (les objets cités précédemment en font partie). Mais en fait, depuis les année 1970, on sait qu'il est possible de générer une foule d'autres objets fractals. Ces objets, beaucoup moins gracieux que ceux énoncés précédemment, font aussi partie de la famille des objets fractals. Ainsi, pour obtenir une *fractale géométrique*, il n'y a qu'à se définir une série d'opérations (par exemple : rotation de 34,7°, translation de 2 cm vers la gauche, homothétie, etc.) et de les appliquer à une forme quelconque. Si, après un nombre théoriquement infini de réitérations, et pour une forme donnée, l'image obtenue converge, c'est-à-dire qu'elle a tendance à passer au même endroit sans tomber exactement sur l'image précédente et sans sortir d'une certaine surface ou d'un certain volume, on a alors une fractale. Plus l'*algorithme géométrique* est complexe, plus la fractale aura tendance à l'être elle aussi.



Le triangle de Waclaw Sierpinski

Pour créer un triangle de Sierpinski...

On commence par un triangle de coté *x* ; la longueur est donc de 3*x*.
Puis, au milieu de ce triangle, on découpe un deuxième triangle de coté *x/2* (longueur totale :

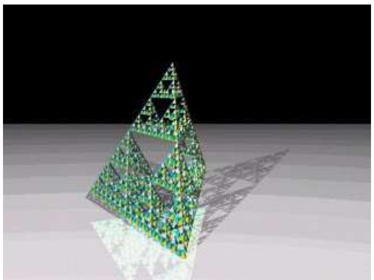
$3x + 3(x/2) = 9(x/2)$).

Ensuite, on découpe dans chacun des 3 triangles obtenus un triangle de longueur $x/4$; longueur totale : $9(x/2) + 3(3(x/4)) = 9(x/2) + 9(x/4) = 27(x/4) = 3^3(x/2^2)$.

A la $n^{\text{ième}}$ itération, on a alors : $3^n(x/2^{n-1})$. Supposons que x est l'unité, cela fait donc une longueur de $3^n/2^{n-1}$. C'est une série (ou suite) croissante qui tend vers l'infini (car 3/2 est supérieur à 1).

Ceci exprime le contour d'une surface, qui, elle, sera la surface du triangle de Sierpinski. Mais alors :
- première itération : surface *x*,
- deuxième itération: $x - x/4 = 3x/4$
- troisième itération: $x - x/4 - 3(x/16) = 9x/16$

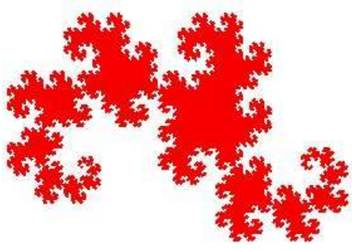
On obtient une suite :
$3^0/2^0$ (première itération), $3^1/2^2$, $3^2/2^4$... On peut aisément démontrer par récurrence qu'après la *n*ième itération, on aura: $3^n/2^{2n}$, ce qui tend vers 0 (car 3/22 est inférieur à 1). Finalement, ici on a une *courbe (de Sierpinski)* qui est de longueur infinie et qui entoure une surface exactement nulle !



Le tétraèdre de Sierpinski

Fractales déterministes

Les *fractales déterministes* se nomment ainsi parce qu'elles sont obtenues à l'aide de la réitération de fonctions polynomiales complexes. C'est-à-dire qu'elles sont des objets mathématiques que l'on peut obtenir numériquement. Elles ont d'abord été développées par Gaston Julia (1883 - 1978). Toutefois, la représentation visuelle, et donc aussi la compréhension, de ces fonctions fut grandement améliorée avec Mandelbrot, puisque ce dernier et ses collègues utilisaient l'informatique pour les produire. Les fractales déterministes sont en fait la représentation d'ensembles de nombres. Ainsi, par exemple, si l'on connecte dans le plan complexe les entiers gaussiens, on obtient l'image de la fameuse *courbe du dragon*.



La courbe du dragon

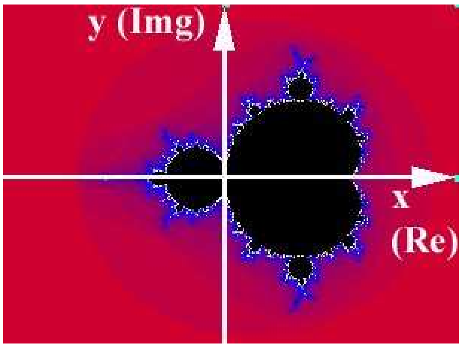
Ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot est la représentation dans le plan complexe de la fonction suivante :

$Z_n = (Z_{n-1})^2 + c$
où *c* est un point constant du plan complexe et
où $Z_0 = 0$

On choisit un point dans le plan complexe et on lui applique l'algorithme énoncé plus haut ; on a alors :

$Z_0 = (0)^2 + c$
$Z_1 = (c)^2 + c = (Z_0)^2 + c$
$Z_2 = (Z_1)^2 + c$
$Z_3 = (Z_2)^2 + c$
$Z_4 = \dots$
$Z_n = (Z_{n-1})^2 + c$



L'ensemble de Mandelbrot

Si, pour un *c* donné, la fonction converge lorsque *n* tend vers l'infini, alors on dira que le nombre *c* fait partie de l'*ensemble de Mandelbrot*.

On appellera Z_c la *trajectoire pour c*, c 'est-à-dire le comportement de Z_n avec un *c* donné. Ainsi, les points en noir sur la figure représentent les nombres complexes faisant partie de l'ensemble de Mandelbrot, c'est-à-dire les nombres *c* tels que Z_c ne tend par vers l'infini lorsque *n* tend vers l'infini. Pour tous les points en couleur, Z_n tend vers l'infini lorsque *n* est à l'infini. La couleur des points représente seulement le nombre d'itérations nécessaires avant que l'on soit assuré que Z_c diverge.

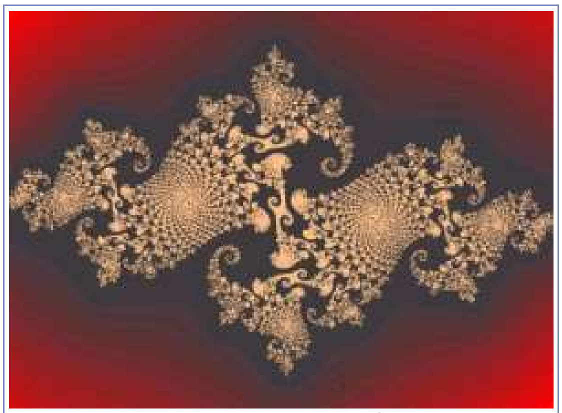
On sait que si $|Z_n| = 2$ pour un certain *n*, alors il est impossible que Z_c converge vers le centre. La couleur représente pour quel *n* $|Z_c| = 2$. C'est donc dire que les points en rouge représentent les nombres complexes *c* pour lesquels la condition $|Z_c| = 2$ est rapidement atteinte (i.e. *n* est petit).

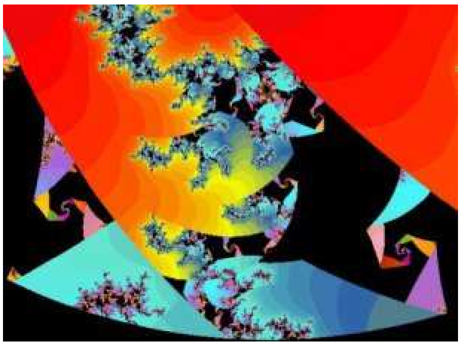
L'ensemble de Mandelbrot pourrait être représenté en deux couleurs seulement. Toutefois, on en utilise d'autres pour observer les trajectoires Zn autour de l'ensemble et pour avoir une meilleure idée de la vitesse avec laquelle Z_c diverge.

On peut aussi se demander pourquoi Mandelbrot consacra tant d'énergie à exprimer visuellement la trajectoire de $Z_0 = 0$. En fait, cette trajectoire est particulière et il sera démontré qu'elle a des implications dans le comportement des autres trajectoires.

Autres fractales déterministe

Gaston Maurice Julia fut le premier à traiter des fractales déterministes. Par la suite, les connaissances dans ce domaine ont beaucoup évolué grâce à la contribution de Mandelbrot et l'étude de la trajectoire particulière $Z_0 = 0$. Toutefois, ces ensembles ne sont que deux exemples de fractales déterministes. Il est possible d'obtenir des objets semblables avec une foule d'autres fonctions. Ces représentations sont moins fréquentes parce qu'elles sont moins utilisées en pratique. Toutefois, selon des considérations plus esthétiques, ces fonctions présentent un intérêt certain puisqu'elles génèrent d'autres types de fractales aux formes encore plus incroyables.


Un ensemble de Julia de $Z_n=Z_{n-1}^2 + c$



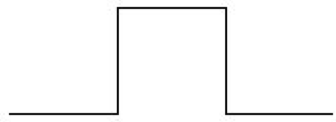
Autre exemple d'un ensemble de Julia (dû à Barnsley)

LES L-SYSTEMES

Les *L-systems*, abréviation de *Lindenmayer-systems*, du nom du biologiste Aristid Lindenmayer (1925 -1989) ont été créés en 1968 pour étudier la croissance des plantes. Przemyslaw Prusinkiewicz les a étendus à trois dimensions et a développé un système informatique pour visualiser des L-systèmes. Pour cela, il s'est inspiré du langage *LOGO* créé dans les années 1960 par Seymour Papert (1928 -), pour apprendre la programmation aux enfants.

Imaginons une tortue (*turtle*) qui regarde vers le nord ; pour la faire tourner vers la droite, il suffit de lui donner l'ordre +, pour la faire tourner vers la gauche, l'ordre -, et l'ordre F pour faire un pas.

Ainsi, F+F+F+F permet de tracer un rectangle et la suite F-F+F+F-F permet de tracer la courbe ci-dessous.



Exemple de L-système

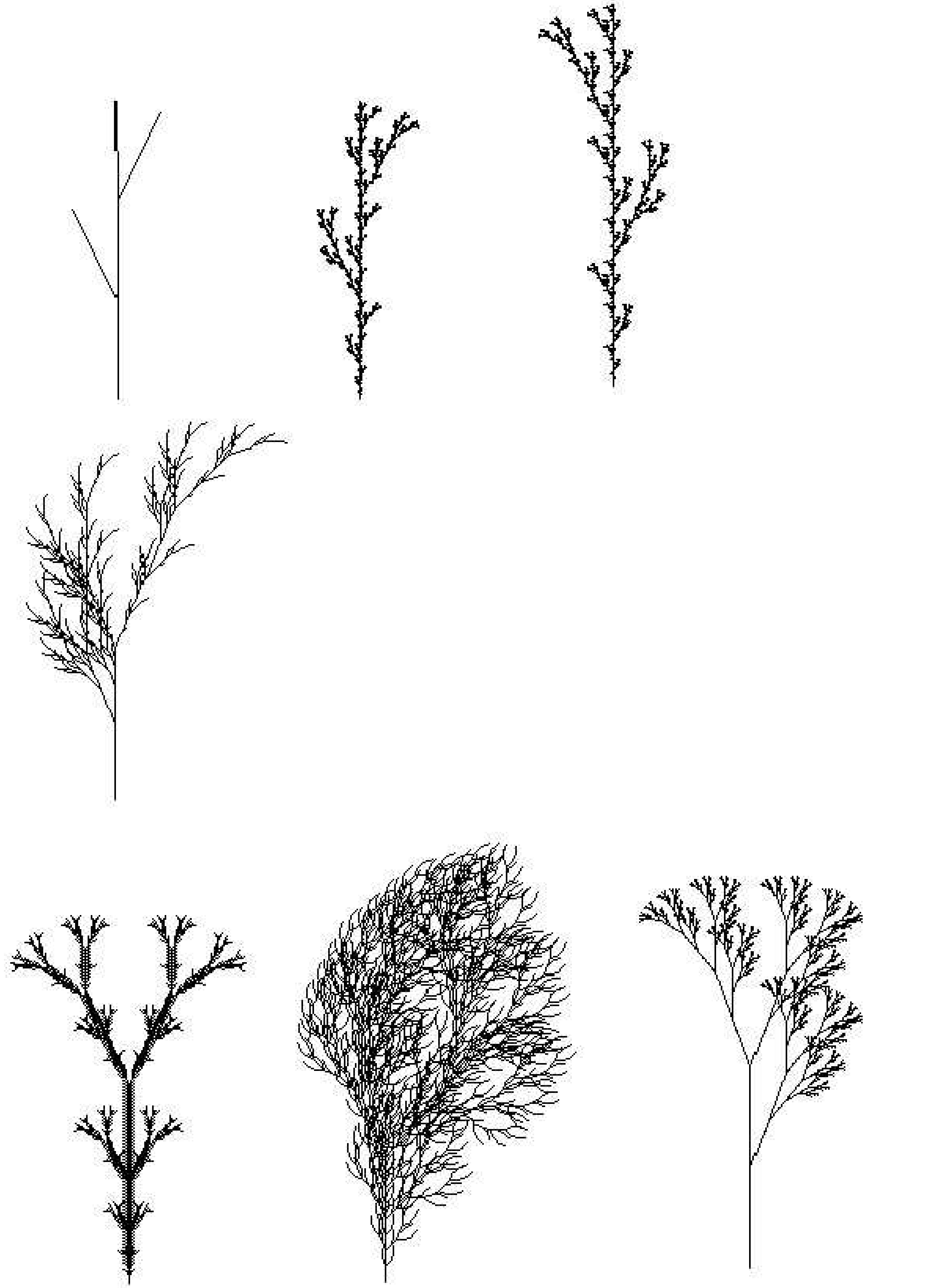
Maintenant, remplaçons chaque F de la suite F+F+F+F représentant un rectangle, par cette nouvelle suite ; on retrouve la *courbe de Koch* à 5 segments, et les notions de générateur et d'initiateur déjà vues.

Pour tracer des plantes, il faut introduire d'autres opérateurs, donc d'autres symboles. Les plus indispensables sont les symboles "[" et "]". "[" permet de garder en mémoire la position de la tortue et de démarrer une nouvelle branche qui se terminera par le symbole "]". Le tracé reprend, à partir de la position de la tortue gardée en mémoire.

Les angles de rotation, ici supposés à 90°, peuvent être spécifiés arbitrairement.

Voici une plante créée à l'aide des L-systèmes, avec la suite des ordres qui ont permis de la tracer ; ici, la plante au niveau 1 et la plante au niveau 4, suivie de cinq autres exemples de plantes.

Initiateur : F
Générateur : F[+F]F[-F]F
Angle : 22,5°



Le logiciel utilisé pour tracer cette plante est *L-systems* de P. Bourke

Ces cinq figures sont des exemples typiques de plantes que l'on peut obtenir avec les L- Systems. Pour se convaincre de la puissance et de la beauté des images générées par des L-systèmes, le lecteur est invité à jeter un coup d'œil sur le magnifique livre de Prusinkiewicz, *The Algorithmic Beauty of Plants* (Springer Verlag).

La théorie du chaos, appliquée à différents domaines, permet d'expliquer nombre de phénomènes jusqu'alors incompréhensibles pour l'homme.

Nous traiterons ici des thèmes suivants :

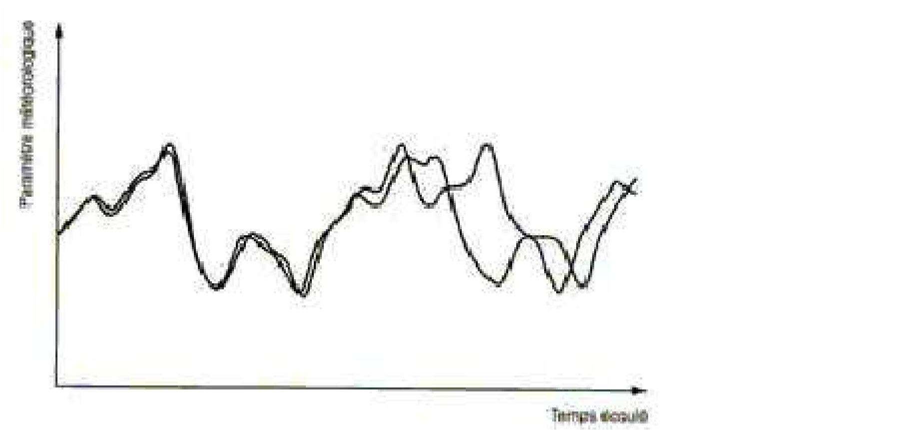
I La météorologie : Lorenz
II Le système solaire
III Autres exemples d'applications

La Terre est un système très évolué, où les phénomènes physiques, chimiques, biologiques et sociaux sont tous indissociables. Ainsi, il n'est pas de meilleur exemple que la *météorologie* comme système complexe. Il faut y tenir compte de la température, de la pression, de l'hygrométrie au sol et en altitude - et ce, partout - du rayonnement solaire, du relief, des océans... Toutes ces variables sont reliées par des relations physiques généralement connues : par exemple, la loi de Mariotte reliant la pression, la température et la masse volumique de l'air, ou les équations régissant les écoulements de fluides. Il est évidemment malaisé de traiter toutes ces informations, et l'on peut penser que des ordinateurs de plus en plus performants permettront d'améliorer toujours ces prévisions.

Pourtant, il serait faux de croire que les imprécisions météorologiques ne sont dues qu'un nombre important de variables en jeu, ou à la complexité des équations. En 1960, Edward Lorenz (1917 -) réalisa une expérience pour laquelle il construisit un modèle très réduit de la Terre, ne dépendant plus que de douze facteurs, significatifs en météorologie. On pouvait, en faisant varier la valeur de départ des douze variables, réaliser des simulations et obtenir toute une série de "temps" différents. Le modèle était plausible, et cette météorologie artificielle ressemblait beaucoup à la véritable : des perturbations y naissaient et mourraient, des fronts se déplaçaient, etc. Mais, malgré la simplicité inhérente au modèle, la météorologie n'en demeurait pas moins, à long terme, totalement imprévisible. Le "hasard" n'apparaissait donc pas lié aux multiples facteurs en cause.

Une anecdote parlante, rendue célèbre, fut lorsque Lorenz voulut un jour poursuivre une série d'observations de la veille, et décida de les reprendre au milieu plutôt qu'au tout début. Il recopia donc l'état du système à ce moment, i.e. douze nombres, et l'entra dans l'ordinateur. A sa plus grande surprise, le nouveau calcul ne reproduisit pas les résultats du premier : il lui ressemblait d'abord, mais s'en séparait très vite. Au bout d'un mois, les résultats donnèrent un "temps simulé" qui n'avait plus rien à voir avec ce qui avait été obtenu la veille. Le génie de Lorenz fut de reconnaître là un "système chaotique", alors que la théorie du chaos n'existait pas encore.

En effet, les ordinateurs ne gardent pas en mémoire toutes les décimales des nombres qu'ils utilisent : ils les arrondissent et travaillent avec un certain nombre de chiffres significatifs seulement. En l'occurrence, la machine de Lorenz en gardait six, et n'en imprimait que trois. Lorenz avait donc utilisé comme base de son second calcul un nombre sensiblement différent du vrai, avec un arrondi entraînant une erreur inférieure au millième, mais suffisante pour que l'*amplification* typique du chaos mène à de grands écarts, dans les résultats, avec le temps.



Divergences des systèmes météorologiques simulés par Lorenz au cours du temps

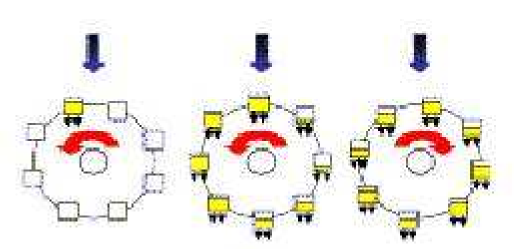
Il en est de même en météorologie, où une petite perturbation double en deux jours, et est amplifiée d'un facteur d'un milliard en un mois, jusqu'à atteindre l'échelle macroscopique.

On parle souvent, de manière assez poétique, en guise d'illustration de ce constat, "d'*effet papillon*". Ainsi, le battement d'ailes d'un papillon au Japon pourrait être à l'origine d'un cyclone dans les Antilles. Et pour pouvoir le prévoir, il faudrait connaître la position exacte du papillon, et son battement d'ailes, avec une précision qui en devient irréaliste.

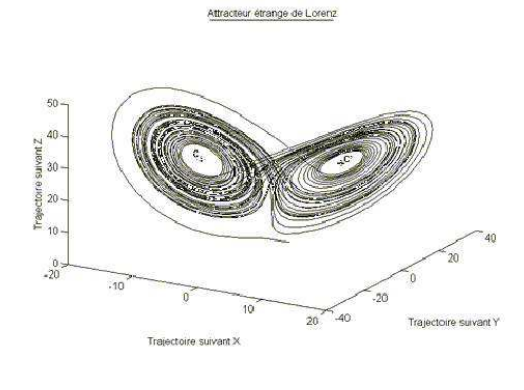
Il faut cependant ajouter que s'il y a effectivement un nombre effarant de variables à considérer en météorologie, elles ne sont pourtant pas toutes *indépendantes*. Il est, par exemple, impensable qu'en deux points séparés d'un kilomètre, la température diffère de 10°C ! Et si cela advenait, un équilibre serait vite rétabli par la circulation de l'air, par exemple. On se doit donc de constater que l'évolution normale, concrète, du système, crée des liens entre les variables et réduit par là même le nombre de celles qui sont indépendantes. Un état donné de l'atmosphère n'est donc jamais arbitraire, et l'évolution naturelle du système se fait vers des *états particuliers*. On touche ici à un exemple concret d'*attracteur étrange*.

Pour illustrer ce mécanisme, Lorenz a ensuite simplifié la situation pour ne s'intéresser qu'aux équations de Navier-Stokes, régissant les écoulements de fluides. Ce système n'est plus régi que par trois équations différentielles. Dans un espace des phases à trois dimensions, l'état du système à un instant donné est représenté par un point. Une fois le point initial choisi (donc les conditions initiales), les équations déterminent entièrement l'évolution du système. Le dessin représente alors sa trajectoire, et nous observons une espèce d'objet à deux "anses" ; la trajectoire s'enroule aléatoirement et indéfiniment autour d'une anse et de l'autre.

On peut imaginer, concrètement, ramener la situation à une roue de moulin à eau composée de récipients troués sur lesquels coule l'eau. Les godets se remplissent et se vident alors en fonction de leur position sous la source d'eau et de la répartition des poids, et la roue tourne d'un côté ou de l'autre. Il n'y a aucune régularité, après répétitions de l'expérience, entre le nombre de tours effectués de chaque côté, le nombre de changements de sens, etc. Cela peut se comprendre par le fait que dans des situations presque d'équilibre, où la roue est à peu près chargée également de part et d'autre, c'est une seule goutte d'eau qui détermine à elle seule le comportement à suivre du système. Toute prévision, d'une fois sur l'autre, est impossible, tout comme il est impossible de reproduire exactement la même évolution du système à deux reprises. C'est ce que représente l'*attracteur de Lorenz*.



La situation : la roue du moulin à eau



L'attracteur étrange de Lorenz

Si l'on change la situation initiale de cette simulation, même de très peu, nous obtenons une trajectoire qui se distancie très vite de la première. Mais, au fil des mouvements de diverses trajectoires, on observe que toutes passent toujours à peu près aux mêmes endroits, bien que ce soit à des moments très différents. L'objet représente donc, en quelque sorte, l'ensemble des états possibles, réalistes, du système. C'est pourquoi on parle souvent d'un *ordre* caché *dans le désordre*…

Mais si l'on pousse le raisonnement au sujet des arrondissements effectués par tout ordinateur, on peut encore se demander ce que valent toutes ces simulations numériques. Une approximation n'est-elle pas amplifiée dans tout système chaotique ? Si on y regarde de plus près, on remarque par exemple que la multiplication de deux nombres de trois chiffres aboutit déjà à un résultat à six chiffres, et ainsi de suite. Il y a donc, à chaque étape, de nombreuses approximations effectuées, forcément de plus en plus importantes.

La résolution d'un paradoxe aussi intenable tient en un résultat mathématique appelé "*lemme de filature*", et selon lequel l'incertitude sur la position initiale et les erreurs d'arrondissements "se compensent", de sorte que la trajectoire simulée correspond bel et bien à une trajectoire vraie, juste et possible. En effet, on considère alors que les erreurs d'arrondis se trouveraient compensés simplement en déplaçant de bien peu le point de départ.

En somme, Lorenz peut être considéré comme *l'un des pères de la théorie du chaos*, pour l'avoir sentie et démontrée numériquement : un système agité par des forces où existent seulement trois variables indépendantes peut bel et bien présenter des mouvements totalement irréguliers et imprévisibles.

Le système solaire est un système que l'on peut considérer comme "simple" : il comporte peu d'objets (le Soleil et les planètes, pour simplifier), et n'est régi que par une seule loi, la gravitation universelle. Depuis la plus haute Antiquité, les hommes observent le ciel, et nombreuses sont ces observations qui nous ont été transmises jusqu'à présent. Nous savons aussi, à notre niveau, que, de la force d'attraction s'exerçant sur un corps, on peut déduire l'accélération de son mouvement et calculer sa trajectoire, à partir de ses position et vitesse initiales. Ainsi, la connaissance de l'état actuel du système solaire devrait-elle nous permettre de prévoir toute son évolution future. L'unique loi de gravitation suffirait à expliquer les mouvements des astres et à prévoir tous les phénomènes célestes.

En réalité, si nous confrontons les prédictions que nous pouvons faire à l'aide de cette loi aux observations accumulées depuis des siècles, nous constatons pourtant que les lois de Johannes Kepler (1571 - 1630), par exemple, ne semblent pas rigoureusement exactes. Cela peut s'expliquer par le fait qu'on n'a tenu compte que de l'attraction solaire, négligeant l'attraction que les planètes exercent les unes sur les autres, comme le suggérait Poincaré. Ces erreurs accumulées seraient à l'origine des écarts observés. Car de fait, la loi de Newton est, encore de nos jours, vérifiée et incontestable, à la modification près ajoutée par la relativité générale.

Nous connaissons donc aujourd'hui, depuis plus de quatre mille ans, les positions des planètes, et le système solaire s'est toujours montré d'une régularité implacable. Nous sommes donc en mesure de croire que le comportement du système solaire est entièrement prévisible. Mais ce n'est, étonnamment, pas le cas !

On peut assimiler sans digression un système chaotique à un mécanisme d'agrandissement, à un "zoom". Ici, c'est l'*écoulement du temps* qui révèle des détails de plus en plus fins. On sait par ailleurs qu'un système chaotique amplifie les écarts initiaux. Ainsi, si la distance entre deux points initiaux de trajectoire est initialement d, elle deviendra $10d$ au bout d'un certain temps, appelé "*temps caractéristique*". On sait maintenant, suite à des simulations numériques, que le système solaire est un système chaotique, de temps caractéristique d'environ dix millions d'années. Or, il y a dix millions d'années, l'homme n'existait pas encore pour s'en rendre compte…

Il a donc fallu attendre les techniques informatiques récentes pour que les calculs nous permettant d'en venir à cette conclusion soient rendus possibles et fassent apparaître au grand jour l'*instabilité du système solaire*.

En 1989, Jacques Laskar suivit numériquement, à l'aide d'un supercalculateur, l'ensemble du système solaire sur deux cents millions d'années. Il montra ainsi que le mouvement des planètes dites "intérieures" (Mercure, Vénus, Terre, Mars) était chaotique, avec un temps caractéristique de dix millions d'années. Une imprécision d'un centimètre sur la position de ces planètes devient alors, au bout de deux cents millions d'années, une imprécision d'un million de kilomètres.

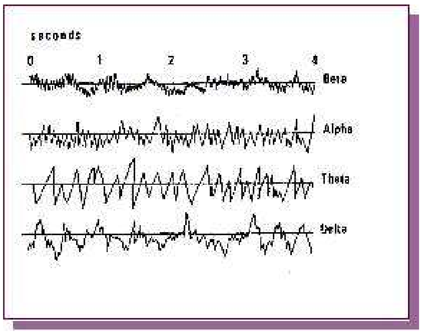
Pour différents points de départ possibles très proches (non distingués physiquement), on peut alors reproduire l'expérience et calculer les trajectoires correspondantes. C'est justement ce que Laskar a fait en 1994. Ses conclusions sont que les orbites des grosses planètes extérieures, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune [on sait depuis 1988 que le mouvement de Pluton est chaotique], sont stables sur plusieurs millions d'années. Les mouvements de Mars et de la Terre, quant à eux, sont chaotiques, mais ne se croisent jamais (en effet, malgré l'imprévisibilité d'un point à un instant précis, nous avons vu qu'une trajectoire chaotique se cantonne sur un attracteur étrange). Il n'y a donc pas de collision possible entre ces deux planètes, ni d'ailleurs avec Vénus. Pour ce qui est de Mercure, par contre, un mouvement très chaotique et une orbite instable sont constatés. A tel point qu'un jour, l'orbite de Mercure pourrait bien l'emmener au-delà de celle de Vénus : une collision serait possible, voire même - qui sait ? - une éjection hors du système solaire.

Les simulations numériques en direction du passé ont aussi révélé que la Terre aurait dû connaître d'importantes perturbations chaotiques : son axe de rotation aurait dû basculer plusieurs fois au cours de son évolution sous l'influence des autres planètes, avec les bouleversements climatiques que l'ont peut imaginer, et peut-être même un empêchement à l'apparition de la vie. C'est uniquement grâce à la présence de son satellite, la Lune, que la Terre est restée stable. Dans le même registre, c'est grâce à la présence de l'énorme planète Jupiter déviant de nombreux astéroïdes dans le système solaire, que des collisions catastrophiques pour la vie sont demeurées rares sur Terre.

Bref, la théorie du chaos nous permet d'appréhender l'univers d'une manière nouvelle, et d'aboutir à des conclusions étonnantes comme l'instabilité du système solaire. La théorie du chaos semble donc rétablir dans le monde un certain degré de *liberté* et d'imprévisible.

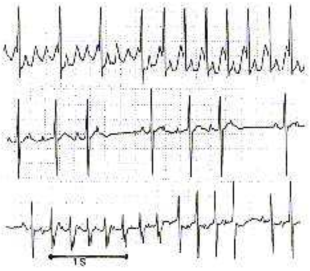
Pour nombre de scientifiques, la théorie du chaos représente le premier pas vers l'unification des sciences. En effet, il s'agit là d'une théorie dont les applications embrassent pratiquement toutes les sciences.

Ainsi, la théorie du chaos permet, en biologie, d'expliquer les *variations des populations animales*, les *oscillations du cerveau* (un électroencéphalogramme, i.e. un enregistrement graphique de l'activité électrique du cerveau au moyen d'électrodes placées sur le cuir chevelu, est un attracteur étrange)… C'est parce que le fonctionnement du cerveau est chaotique que les déterminismes d'une personne, que sont les prédispositions génétiques, mais aussi l'itinéraire de la vie (développement intra-utérin, perceptions sensorielles, caractéristiques des sens, éducation, religion, sexe, tout ce que l'on a en mémoire…), n'épuisent pas l'être, et qu'un réel degré d'incertitude, une série de possibilités indéterminables, persistent. Ce pourrait donc être en vertu de la théorie du chaos que l'homme est libre et unique.



Exemples d'électroencéphalogrammes

Les *arythmies cardiaques* typiques de nombreuses maladies du cœur se trouvent aussi expliquées par la théorie du chaos. Dans un cœur normal, des impulsions électriques se répandent de manière régulière dans les fibres musculaires, qui forcent le ventricule du cœur à se contracter et à pomper le sang. Une fois contractées, les fibres sont insensibles aux signaux électriques ; on parle de période réfractaire. Ce sont ainsi les variations de la durée de la période réfractaire d'une zone du ventricule à une autre qui seraient la cause de la contraction spasmodique à l'origine d'une crise cardiaque.



Exemples de troubles du rythme cardiaque chez l'enfant

En économie, les *mouvements commerciaux* et les *marchés financiers*, ainsi que les *cycles économiques*, peuvent être expliqués en partie par la théorie du chaos.

En informatique, des procédés de *compression d'images* ont été mis au point à partir des fractales. Des *images de synthèse*, au cinéma ou dans le domaine des jeux vidéo, sont rendues de plus en plus réalistes, toujours grâce aux fractales. En effet, les objets fournis par la géométrie euclidienne sont assez peu aptes à représenter fidèlement le monde : voit-on souvent, dans la nature, des cercles ou des cubes parfaits ? Non, les formes de la nature répondent bien plus aisément aux formes fractales.

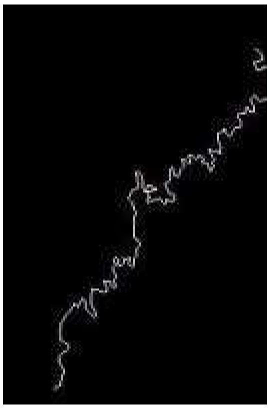
Même dans le domaine de l'*art*, depuis les années 1980, la beauté des fractales est exploitée et appréciée, et on voit des expositions se multiplier avec pour thème ces images fascinantes.

Exemples d'applications artistiques des fractales (images issues du site Hidden Dimension**)**

Les images fractales ont un intérêt esthétique certain, mais on peut se demander si elles ont une autre utilité. On peut remarquer certaines fonctions remarquables des fractales dans différents domaines.

Les fractales ont un lien très étroit avec le hasard, et permettent donc de modéliser des expériences aléatoires complexes, d'où l'utilisation en finance, pour modéliser les *variations des cours de la Bourse*.

On peut également appliquer l'étude des fractales à l'étude des *mouvements chaotiques et turbulents*, comme ceux, par exemple, d'une particule très légère à la surface d'un liquide (*mouvement Brownien*), ou ceux des masses atmosphériques, pour les prévisions météorologiques...



Visualisation d'un mouvement brownien

On peut aussi modéliser le relief terrestre, mesurer la longueur et étudier la forme des côtes (pensez par exemple à la côte de Bretagne, qui paraît aussi complexe vue d'un satellite que vue de l'observateur qui se promène sur la côte).

Les fractales (déterministes) peuvent aussi permettre de trouver l'arrangement optimal des composants électroniques dans un ordinateur, pour éviter d'avoir des croisements de pistes sur les circuits imprimés.

Selon de nombreux astrophysiciens, la répartition des galaxies dans l'espace pourrait bien être fractale. La théorie de la formation des étoiles et des galaxies de Fred Hoyle (1915 -) et un grand nombre de données empiriques suggèrent une large zone de similitude interne dans laquelle la dimension fractale serait voisine de 1.

Dans ce contexte, rappelons aussi les travaux de Laurent Nottale (1952 -) de l'Observatoire de Meudon, qui tente de trouver une théorie unifiée par la "fractalisation" de la théorie de la relativité, c'est-à-dire par une modification des lois relativistes telles qu'elles dépendent de l'ordre de grandeur des objets auxquels elles s'appliquent.

La structure de nombreux matériaux, naturels ou synthétisés, relève aussi de la géométrie fractale. Tel est le cas de matériaux polymères, de certaines surfaces rugueuses ou de corps poreux. Diverses mesures suggèrent également que les surfaces de fracture dans les métaux ont un caractère fractal. La structure fractale de certains matériaux nouveaux leur confère des propriétés exceptionnelles. Les chimistes ont pu récemment synthétiser des matériaux de structure extrêmement ténue, tels que des gels de silice, dont la densité est de l'ordre de 50 kg/m^3. Cette densité est intermédiaire entre celle d'un gaz (de l'ordre de 1 kg/m^3) et celle d'un liquide ou d'un solide (de l'ordre de 1000 kg/m^3). De tels matériaux, ultra légers, sont appelés *aérogels*. Leurs propriétés surprenantes (faible densité, très grand pouvoir d'isolation thermique) sont liées à leur structure fractale.

Pour finir, une photo du couché de la lune Julia sur le Mont Mandel

Conclusion

Nous avons donc vu que le hasard et la prédictibilité sont des thèmes qui inspirent des interrogations aux hommes depuis longtemps. C'est ainsi que Laplace croyait en une possibilité de connaître l'avenir et le passé à partir du simple présent. Par la suite, Poincaré fut l'un des premiers à mettre en évidence un système chaotique (l'attraction qu'exercent trois corps les uns sur les autres) et à établir l'une de ses caractéristiques de base : la sensibilité critique aux conditions initiales. Plus tard encore, ce sont principalement les noms de Mandelbrot et de Lorenz que nous retenons, pour leur contribution à la notion d'attracteur étrange inhérente à la théorie du chaos, et le développement des fractales en mathématiques.

Depuis, la théorie du chaos a donné lieu à moult applications exaltantes dans des domaines scientifiques très divers (sciences humaines ou pures), et a permis un élargissement de notre compréhension de l'univers, du monde, et une redéfinition des notions de déterminisme et de liberté. On peut, sans se tromper, affirmer que la théorie du chaos a donné lieu à une véritable petite *révolution* non encore achevée, et que la découverte de ses implications n'a pas fini de nous surprendre.